

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 29/06/15

- (1) Sia $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tale che $f_0 \geq 0$ q.o. e $\int_{\mathbb{R}^n} f_0 = 1/2$. Si definisce per ricorrenza la successione di funzioni $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$f_1(x) = f_0 * f_0(x), f_{k+1}(x) = f_k * f_k(x) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Stabilire se la successione di funzioni $\{f_k\}$ converge in $L^1(\mathbb{R}^n)$, e se sì a quale limite.

- (2) Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p, 1 \leq p < \infty$. Determinare, se esiste,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left\{ f > \frac{k}{k+1} \right\}.$$

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Siano $\{f_n\}, \{g_n\}$ successioni di funzioni misurabili su X , tali che

$$f_n \rightarrow 0, g_n \rightarrow 0 \text{ in misura}.$$

Stabilire se vale

$$\sqrt{f_n^2 + g_n^2} \rightarrow 0 \text{ in misura}.$$